



**Zadania na XV Podkarpacki Konkurs Matematyczny  
im. Franciszka Lejki  
Poziom II**

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Etap powiatowy

28 lutego 2015 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że liczba  $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$  jest całkowita dla dowolnego  $n$  całkowitego.
2. Udowodnij, że jeżeli stosunek rozwiązań równania kwadratowego  $ax^2 + (2a + b)x + 2b - a = 0$  ( $a \neq 0$ ) wynosi 3:1, to  $28a^2 - 20ab + 3b^2 = 0$ .
3. W trapezie ABCD ( $AB \parallel CD$ ) przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O takim, że  $AO : OC = k$  ( $k > 1$ ). Pole trójkąta AOD jest równe P. Wyznacz w zależności od P i k pole trapezu ABCD.
4. Wykaż, że jeżeli dwie liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek  $a + b = 2$ , to  $a^4 + b^4 \geq 2$ .
5. W prostokącie ABCD dane są długości boków  $AB = 2$  i  $AD = 5$ . Na bokach AB, BC, CD i DA umieszczono odpowiednio punkty K, L, M i N takie, że  $AN = 1$ ,  $CM = 2$  i  $BK = 2BL$ . W jakim stosunku punkt K podzielił bok AB jeśli wiemy, że wyrażenie  $KL^2 + LM^2 + MN^2 + NK^2$  osiąga najmniejszą możliwą wartość?

Powodzenia!